

Semiasymptotische Reihen für die Beugung einer ebenen Welle am Zylinder

Von WALTER FRANZ und RAIMUND GALLE

Aus dem Institut für Theoretische Physik der Universität Münster i. W.

(Z. Naturforsch. **10a**, 374—378 [1955]; eingegangen am 5. März 1955)

In einer vorangegangenen Arbeit¹ wurden die Greenschen Funktionen des Zylinders und der Kugel der Watson-Transformation unterworfen und asymptotische Formeln abgeleitet, die im Bereich nicht zu kleiner ka ($k=2\pi/\lambda$, a =Radius des Zylinders oder der Kugel) brauchbar sind und eine Korrektur der geometrischen Optik darstellen. Nach dieser Methode werden für die Beugung einer ebenen Welle am Zylinder Entwicklungen bis zur Größenordnung $(ka)^{-2}$ angegeben.

1. Ausgangsformeln

Die primäre ebene Welle $e^{-ik\varrho\cos\varphi}$ falle auf einen Zylinder vom Radius a , dessen Achse zur z -Achse parallel ist. Dann lautet die Lösung des Beugungsproblems

$$u(\varrho, \varphi) = \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} e^{i\nu(\varphi-\pi/2)} \cdot \left\{ J_{\nu}(k\varrho) - \frac{\Omega J_{\nu}(ka)}{\Omega H_{\nu}^{(1)}(ka)} H_{\nu}^{(1)}(k\varrho) \right\}, \quad (1)$$

wobei $\Omega=1$ für die Randbedingung $u=0$ und $\Omega(x)F(x)=dF/dx$ für die Randbedingung $\partial u/\partial n=0$. Diese Reihe wird nach der früher¹ angegebenen Methode in eine Residuensumme über die Nullstellen von $\Omega H_{\nu}^{(1)}(ka)$ und ein Restintegral verwandelt. Es ergibt sich schließlich für die Randbedingungen $\bar{u}(a)=0$ und $\partial u/\partial n(a)=0$

für das Schattengebiet auf dem Zylinder ($|\varphi-\pi|<\pi/2$):

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial n}(a, \varphi) = \frac{4i}{a} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\cos \bar{\nu}_l(\varphi-\pi)}{\sin \bar{\nu}_l \pi} \cdot \frac{\exp[-i \bar{\nu}_l \pi/2]}{(\partial H_{\nu}^{(1)}(ka)/\partial \nu)_{\nu=\bar{\nu}_l}}, \quad (2a)$$

$$u(a, \varphi) = -\frac{4i}{ka} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\cos \nu_l(\varphi-\pi)}{\sin \nu_l \pi} \cdot \frac{\exp[-i \nu_l \pi/2]}{(\partial^2 H_{\nu}^{(1)}(ka)/\partial \nu \partial (ka))_{\nu=\nu_l}}, \quad (2b)$$

für das Lichtgebiet auf dem Zylinder ($|\varphi|<\pi/2$):

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial n}(a, \varphi) = \frac{4i}{a} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\cos \bar{\nu}_l \varphi}{\sin \bar{\nu}_l \pi} \cdot \frac{\exp[i \bar{\nu}_l \pi/2]}{(\partial H_{\nu}^{(1)}(ka)/\partial \nu)_{\nu=\bar{\nu}_l}} + \frac{2}{i\pi a} \int_{-\infty}^{+\infty} d\nu \frac{\exp[i \nu(\varphi-\pi/2)]}{H_{\nu}^{(1)}(ka)}, \quad (3a)$$

$$u(a, \varphi) = -\frac{4i}{ka} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\cos \nu_l \varphi}{\sin \nu_l \pi} \cdot \frac{\exp[i \nu_l \pi/2]}{(\partial^2 H_{\nu}^{(1)}(ka)/\partial \nu \partial (ka))_{\nu=\nu_l}} - \frac{2}{i\pi ka} \int_{-\infty}^{+\infty} d\nu \frac{\exp[i \nu(\varphi-\pi/2)]}{H_{\nu}^{(1)}(ka)}, \quad (3b)$$

für die Ausstrahlung in das geometrisch beleuchtete Gebiet:

$$\bar{u}(\varrho, \varphi) = \frac{1}{2} \int_E d\nu \exp[i \nu(\varphi-\pi/2)] \left\{ H_{\nu}^{(2)}(k\varrho) - \frac{H_{\nu}^{(2)}(ka) \cdot H_{\nu}^{(1)}(k\varrho)}{H_{\nu}^{(1)}(ka)} \right\} \quad (4a)$$

$$+ \frac{4i}{ka} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\cos \bar{\nu}_l \varphi}{\sin \bar{\nu}_l \pi} \frac{\exp[i \bar{\nu}_l \pi/2] \cdot H_{\bar{\nu}_l}^{(1)}(k\varrho)}{(\partial H_{\nu}^{(1)}(ka)/\partial \nu)_{\nu=\bar{\nu}_l} \cdot H_{\bar{\nu}_l}^{(1)}(ka)},$$

$$u(\varrho, \varphi) = \frac{1}{2} \int_E d\nu \exp[i \nu(\varphi-\pi/2)] \left\{ H_{\nu}^{(2)}(k\varrho) - \frac{H_{\nu}^{(2)'}(ka) \cdot H_{\nu}^{(1)}(k\varrho)}{H_{\nu}^{(1)'}(ka)} \right\} \quad (4b)$$

$$- \frac{4i}{ka} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\cos \nu_l \varphi}{\sin \nu_l \pi} \frac{\exp[i \nu_l \pi/2] \cdot H_{\nu_l}^{(1)}(k\varrho)}{(\partial^2 H_{\nu}^{(1)}(ka)/\partial \nu \partial (ka))_{\nu=\nu_l} \cdot H_{\nu_l}^{(1)}(ka)}.$$

¹ W. Franz, Z. Naturforsch. **9a**, 705 [1954].



$\bar{\nu}_l$ und ν_l sind die im 1. Quadranten gelegenen Nullstellen von $H_\nu^{(1)}(ka)$ und $H_\nu^{(1)'}(ka)$, der Weg E verläuft vom 2. zum 4. Quadranten (siehe Abb. 1), im Unendlichen entlang der Nullstellenreihe von $H_\nu^{(2)}(kQ)$.

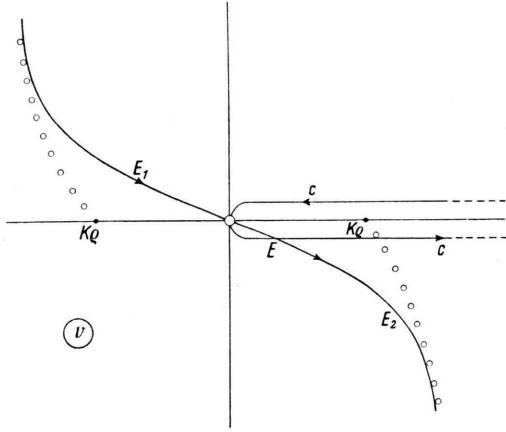


Abb. 1. Integrationswege.

2. Entwicklung der Hankel-Funktionen und ihrer Nullstellen

Die Formeln (2) bis (4) werden im folgenden asymptotisch für $0 \ll ka \ll kQ$ nach der Sattelpunktmethode ausgewertet. Zunächst bestimmen wir die Nullstellen von $H_\nu^{(1)}(x)$ und $H_\nu^{(1)'}(x)$. Die Watsonsche Integraldarstellung dieser Funktionen lautet

$$H_\nu^{(1)}(x) = \frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{\infty + i\pi} dt \cdot \exp[x \cdot \sinh t - \nu t], \quad (5a)$$

$$H_\nu^{(1)'}(x) = \frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{\infty + i\pi} dt \cdot \sinh t \cdot \exp[x \cdot \sinh t - \nu t]. \quad (5b)$$

Für $\nu \approx x$ liegt der Sattel bei $t \approx 0$. Wir behalten nur die Glieder bis zur 3. Ordnung in t im Exponenten und entwickeln die übrigen in eine Reihe. Diese wird nach endlich vielen Gliedern abgebrochen und der Integrationsweg so verlegt, daß das restliche Integral konvergiert. Das Bildungsgesetz der Reihe erkennt man, wenn man beachtet, daß jeder Faktor t des Integranden durch eine Differentiation nach $-\nu$ ersetzt werden kann. Man erhält mit Benutzung von Differentialoperatoren:

$$H_\nu^{(1)}(x) \sim \exp \left[-\frac{x}{5!} \cdot \frac{\partial^5}{\partial \nu^5} - \frac{x}{7!} \cdot \frac{\partial^7}{\partial \nu^7} - \frac{x}{9!} \cdot \frac{\partial^9}{\partial \nu^9} - \dots \right] \quad (6a)$$

$$\cdot \frac{1}{i\pi} \int_{-\exp[i\pi/6] \cdot \infty}^{\exp[i\pi/6] \cdot \infty} dt \exp \left[-\frac{1}{6} x t^3 + (\nu - x) t \right],$$

$$H_\nu^{(1)'}(x) \sim -\sinh \left(\frac{\partial}{\partial \nu} \right) H_\nu^{(1)}(x). \quad (6b)$$

Mit der Abkürzung

$$A(q) = \frac{e^{-i\pi/6}}{2} \cdot \left(\frac{x}{6} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \int_{\exp[i\pi/6] \cdot \infty}^{\exp[i\pi/6] \cdot \infty} dt \cdot \exp \left[-\frac{1}{6} x t^3 + (\nu - x) t \right] \quad (7a)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \cdot \exp \left[-i(\tau^3 - q\tau) \right],$$

$$\tau = e^{-i\pi/6} \cdot (x/6)^{\frac{1}{3}} \cdot t$$

für das Airysche Integral und

$$q = y(\nu - x), \quad y = e^{-i\pi/3} \cdot (6/x)^{\frac{1}{3}} \quad (7b)$$

geht (6a, b) über in

$$H_\nu^{(1)}(x) \sim \frac{2y}{\pi} \cdot \left\{ A + \frac{y^2}{20} A^{(5)} + y^4 \left(\frac{A^{(7)}}{840} + \frac{A^{(10)}}{800} \right) + y^6 \left(\frac{A^{(9)}}{840 \cdot 72} + \frac{A^{(12)}}{84 \cdot 200} + \frac{A^{(15)}}{48000} \right) + \dots \right\}, \quad (8a)$$

$$H_\nu^{(1)'}(x) \sim -\frac{2y^2}{\pi} \cdot \left\{ A^{(1)} + y^2 \left(\frac{A^{(3)}}{6} + \frac{A^{(6)}}{20} \right) + y^4 \left(\frac{A^{(5)}}{120} + \frac{A^{(8)}}{105} + \frac{A^{(11)}}{800} \right) + y^6 \left(\frac{A^{(7)}}{120 \cdot 42} + \frac{191 \cdot A^{(10)}}{72 \cdot 4200} + \frac{3 \cdot A^{(13)}}{11200} + \frac{A^{(16)}}{48000} \right) + \dots \right\}. \quad (8b)$$

$A(q)$ genügt der Differentialgleichung

$$A'' + \frac{q}{3} A = 0.$$

Ersetzt man die höheren Ableitungen von A mit Hilfe der Differentialgleichung durch A und A' , so ergibt sich

$$H_\nu^{(1)}(x) \sim \frac{2y}{\pi} \cdot \left\{ A + y^2 \left[\frac{q}{45} A + \frac{q^2}{180} A' \right] + y^4 \left[\left(\frac{13q^2}{81 \cdot 140} - \frac{q^5}{243 \cdot 800} \right) A + \left(-\frac{1}{420} + \frac{q^3}{27 \cdot 140} \right) A' \right] + y^6 \left[\left(-\frac{1}{8100} + \frac{463q^3}{27 \cdot 81 \cdot 2800} - \frac{283q^6}{81 \cdot 81 \cdot 112000} \right) A + \left(-\frac{19q}{81 \cdot 700} + \frac{13q^4}{27 \cdot 81 \cdot 400} - \frac{q^7}{81 \cdot 81 \cdot 160000} \right) A' \right] + \dots \right\}, \quad (9a)$$

$$\begin{aligned}
H_{\nu}^{(1)'}(x) &\sim -\frac{2y^2}{\pi} \left\{ A' - y^2 \left[\left(\frac{1}{30} + \frac{q^3}{540} \right) A + \frac{q}{45} A' \right] \right. \\
&- y^4 \left[\left(\frac{q}{540} + \frac{q^4}{81 \cdot 1120} \right) A + \left(\frac{19q^2}{81 \cdot 280} + \frac{q^5}{243 \cdot 800} \right) A' \right] \\
&- y^6 \left[\left(\frac{103q^2}{243 \cdot 2800} - \frac{181q^5}{81 \cdot 81 \cdot 56000} - \frac{q^8}{81 \cdot 243 \cdot 16000} \right) A \right. \\
&+ \left. \left(-\frac{23}{81 \cdot 1400} + \frac{283q^3}{27 \cdot 81 \cdot 2800} + \frac{61q^6}{81 \cdot 81 \cdot 56000} \right) A' \right] \\
&\left. + \dots \right\}.
\end{aligned} \quad (9b)$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
A(q) &= \frac{\pi}{3} \left(\frac{q}{3} \right)^{1/2} \cdot \left\{ J_{1/3} \left(2 \left(\frac{q}{3} \right)^{3/2} \right) + J_{-1/3} \left(2 \left(\frac{q}{3} \right)^{3/2} \right) \right\}, \\
A'(q) &= -\frac{\pi q}{9} \cdot \left\{ J_{2/3} \left(2 \left(\frac{q}{3} \right)^{3/2} \right) - J_{-2/3} \left(2 \left(\frac{q}{3} \right)^{3/2} \right) \right\}. \quad (10)
\end{aligned}$$

Damit ist eine Entwicklung gefunden, die die Hankel-Funktion $H_{\nu}^{(1)}(x)$ und ihre Ableitung bei festem x und variablem $\nu \approx x$ mit großer Genauigkeit ausdrückt durch tabulierte Funktionen von festem Index und variablem Argument.

In erster Näherung sind die Nullstellen $\bar{\nu}_l$ und \bar{q}_l von $H_{\nu}^{(1)}(x)$ und $H_{\nu}^{(1)'}(x)$ durch die Nullstellen \bar{q}_l und q_l von $A(q)$ und $A'(q)$ gegeben. Um genauere Werte zu erhalten, setzen wir ν als Potenzreihe in $y^2 \sim x^{-2/3}$ an, entwickeln $A(q)$ und $A'(q)$ an den Stellen \bar{q}_l und q_l nach Taylor und bestimmen durch Einsetzen in (9) sukzessive die Koeffizienten. Es ergibt sich mit $s = 6^{-1/3} \cdot q$

$$\begin{aligned}
\bar{\nu}_l &= x + e^{i\pi/3} \cdot x^{1/3} \cdot \bar{s}_l - e^{-i\pi/3} \cdot x^{-1/3} \cdot \left(\frac{\bar{s}_l^2}{30} - \frac{1}{70x} \right) \\
&\cdot \left(1 - \frac{\bar{s}_l^3}{5} \right) + e^{i\pi/3} \cdot x^{-5/3} \cdot \frac{1}{3150} \left(29\bar{s}_l - \frac{281 \cdot \bar{s}_l^4}{180} \right) \\
&+ \dots, \quad (11a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nu_l &= x + e^{i\pi/3} \cdot x^{1/3} \cdot s_l - e^{-i\pi/3} \cdot x^{-1/3} \cdot \frac{1}{10} \left(\frac{1}{s_l} + \frac{s_l^2}{3} \right) \\
&+ \frac{1}{200x} \left(\frac{1}{s_l^3} + 8 + \frac{4s_l^3}{7} \right) \\
&- e^{i\pi/3} \cdot x^{-5/3} \cdot \frac{1}{2000} \left(\frac{1}{s_l^5} - \frac{4}{3s_l^2} \right) \\
&+ \frac{4 \cdot 611 \cdot s_l}{63} + \frac{2 \cdot 281 \cdot s_l^4}{7 \cdot 81} + \dots. \quad (11b)
\end{aligned}$$

Durch Einsetzen von (11) in (9) folgt

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial H_{\nu}^{(1)}(x)}{\partial \nu} \right)_{\nu=\bar{\nu}_l} &= \frac{2y^2}{\pi} \cdot A'(\bar{q}_l) \\
&\cdot \left\{ 1 - \frac{e^{i\pi/3}}{x^{2/3}} \cdot \frac{\bar{s}_l}{5} - \frac{e^{-i\pi/3}}{x^{4/3}} \cdot \frac{37\bar{s}_l^2}{630} \right. \\
&+ \left. \frac{1}{x^2} \left(-\frac{37}{3150} + \frac{563\bar{s}_l^3}{81 \cdot 350} \right) + \dots \right\}, \quad (12a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial H_{\nu}^{(1)}(x)}{\partial \nu \partial x} \right)_{\nu=\nu_l} &= \frac{2y^3 \cdot q_l}{3\pi} A(q_l) \\
&\cdot \left\{ 1 + \frac{e^{i\pi/3}}{x^{2/3}} \left(\frac{1}{10s_l^2} + \frac{s_l}{15} \right) + \frac{e^{-i\pi/3}}{x^{4/3}} \left(\frac{1}{200s_l^4} \right. \right. \\
&- \frac{7}{300s_l} + \frac{47s_l^2}{3150} \left. \right) - \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{2000s_l^6} - \frac{1}{1000s_l^3} \right. \\
&- \frac{739}{9 \cdot 1750} + \frac{207s_l^3}{27 \cdot 1750} \left. \right) + \dots \left. \right\}, \quad (12b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial H_{\nu}^{(1)}(x)}{\partial x} \right)_{\nu=\bar{\nu}_l} &= -\frac{2y^2}{\pi} A'(\bar{q}_l) \left\{ 1 + \frac{e^{i\pi/3}}{x^{2/3}} \cdot \frac{2\bar{s}_l}{15} \right. \\
&+ \frac{e^{-i\pi/3}}{x^{4/3}} \cdot \frac{2\bar{s}_l^2}{105} + \frac{1}{x^2} \cdot \frac{4}{9 \cdot 175} \left(1 - \frac{17\bar{s}_l^3}{9} \right) + \dots \left. \right\}, \quad (13a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{\nu_l}^{(1)}(x) &= \frac{2y}{\pi} A(q_l) \\
&\cdot \left\{ 1 - \frac{e^{i\pi/3}}{x^{2/3}} \cdot \frac{2s_l}{15} - \frac{e^{-i\pi/3}}{x^{4/3}} \left(-\frac{7}{300s_l} + \frac{58s_l^2}{9 \cdot 175} \right) \right. \\
&+ \left. \frac{1}{x^2} \left(-\frac{1}{750s_l^3} - \frac{71}{9 \cdot 250} + \frac{868 \cdot s_l^3}{81 \cdot 875} \right) + \dots \right\}. \quad (13b)
\end{aligned}$$

Im Falle der Kugel interessieren die Nullstellen $\bar{\nu}_l$ und $\hat{\nu}_l$ von $d/dx (x^{1/2} \cdot H_{\nu}^{(1)}(x))$ und $d/dx (x^{-1/2} \cdot H_{\nu}^{(1)}(x))$:

$$\begin{aligned}
\bar{\nu}_l &= x + e^{-i\pi/3} \cdot x^{1/3} \cdot s_l + \frac{e^{-i\pi/3}}{x^{1/3}} \cdot \frac{1}{10} \left(\frac{3}{2s_l} - \frac{s_l^2}{3} \right) \\
&+ \frac{9}{800x} \left(\frac{1}{s_l^3} - \frac{8}{9} + \frac{16s_l^3}{63} \right) + \frac{e^{i\pi/3}}{x^{5/3}} \cdot \frac{1}{16000} \\
&\cdot \left(\frac{27}{s_l^5} - \frac{36}{s_l^2} - \frac{16 \cdot 197 \cdot s_l}{63} - \frac{16 \cdot 281 \cdot s_l^4}{7 \cdot 81} \right) + \dots, \\
\hat{\nu}_l &= x + e^{i\pi/3} \cdot x^{1/3} \cdot s_l - \frac{e^{-i\pi/3}}{x^{1/3}} \cdot \frac{1}{10} \left(\frac{7}{s_l^2} + \frac{s_l^3}{3} \right) \\
&+ \frac{3}{100x} \left(\frac{49}{24s_l^3} + 3 + \frac{2s_l^3}{21} \right) - \frac{e^{i\pi/3}}{x^{5/3}} \cdot \frac{1}{4000} \\
&\cdot \left(\frac{343}{4s_l^5} - \frac{343}{3s_l^2} + \frac{428s_l}{3} + \frac{4 \cdot 281 \cdot s_l^4}{7 \cdot 81} \right) + \dots. \quad (14)
\end{aligned}$$

3. Semiasymptotische Reihen für die Wellenfunktionen

Die in (3) auftretenden Integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\nu \frac{\exp[i\nu(\varphi - \pi/2)]}{\Omega H_{\nu}^{(1)}(x)}$$

werten wir nach der Sattelpunktmethode aus, indem wir den Integranden mit $H_{\nu}^{(2)}(x)$ erweitern und im Zähler dafür die Sommerfeldsche Integraldarstellung, im Nenner die Debyeschen asymptotischen Reihen für $H_{\nu}(x)$ einsetzen².

$$\text{Das Integral } \frac{1}{2} \int_E d\nu \exp[i\nu(\varphi - \pi/2)] H_{\nu}^{(2)}(kq)$$

² Magnus-Oberhettinger, Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik, 2. Aufl. Springer 1948; S. 33.

von (4) ergibt für $|\varphi| < \pi/2$ exakt die Primärwelle $e^{-ik\rho \cos \varphi}$.

Zum Beweis gehen wir von der Entwicklung der ebenen Welle nach Bessel-Funktionen aus

$$e^{-ik\rho \cos \varphi} = \sum_{\nu=0}^{\infty} e^{i\nu\pi/2} \cdot \varepsilon_{\nu} \cdot J_{\nu}(k\rho) (-1)^{\nu} \cos \nu \varphi$$

($\varepsilon_0 = 1, \quad \varepsilon_{\nu} = 2$ für $\nu \neq 0$)

und verwandeln sie in ein Umlaufsintegral über die positive reelle Achse, wobei der Weg C durch den Nullpunkt zu legen ist (Hauptwert):

$$e^{-ik\rho \cos \varphi} = \frac{1}{i} \int_C d\nu e^{i\nu\pi/2} J_{\nu}(k\rho) \frac{\cos \nu \varphi}{\sin \nu \pi}$$

$$= \frac{1}{i} \int_E d\nu e^{i\nu\pi/2} J_{\nu}(k\rho) \frac{\cos \nu \varphi}{\sin \nu \pi}.$$

Bei der letzten Umformung wurde benutzt, daß der Integrand rechts von den Nullstellen von $H_{\nu}^{(2)}(k\rho)$ für $|\varphi| < \pi/2$ im Unendlichen mindestens exponentiell verschwindet. Da E symmetrisch zum Nullpunkt liegt,

führen wir auf dem unteren Teil E_2 von E als neue Variable $-\nu$ ein und erhalten

$$e^{-ik\rho \cos \varphi} = \frac{1}{i} \int_{E_1} d\nu \frac{\cos \nu \varphi}{\sin \nu \pi} \cdot (e^{i\nu\pi/2} J_{\nu}(k\rho) - e^{-i\nu\pi/2} J_{-\nu}(k\rho)).$$

Wegen $e^{i\nu\pi} J_{\nu}(z) - J_{-\nu}(z) = i \sin \nu \pi \cdot H_{\nu}^{(2)}(z)$ ist also

$$e^{-ik\rho \cos \varphi} = \int_{E_1} d\nu \cos \nu \varphi e^{-i\nu\pi/2} H_{\nu}^{(2)}(k\rho)$$

und, weil $\exp[-i\nu\pi/2] H_{\nu}^{(2)}(k\rho)$ eine gerade Funktion von ν ist,

$$e^{-ik\rho \cos \varphi} = \frac{1}{2} \int_E d\nu \exp[i\nu(\varphi - \pi/2)] H_{\nu}^{(2)}(k\rho).$$

Die Integrale

$$\frac{1}{2} \int_E d\nu e^{i\nu(\varphi - \pi/2)} \cdot \frac{\Omega H_{\nu}^{(2)}(ka) \cdot H_{\nu}^{(1)}(k\rho)}{\Omega H_{\nu}^{(1)}(ka)}$$

stellen die reflektierte Welle dar und berechnen sich wieder mit Hilfe der Debyeschen Formeln.

Wir erhalten schließlich folgende Endergebnisse: für das Schattengebiet auf dem Zylinder ($|\pi - \varphi| < \pi/2$):

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial n}(a, \varphi) = k \frac{e^{-i\pi/3}}{(ka)^{1/3}} \cdot \sum \bar{D}_l \frac{\exp[i\bar{\nu}_l(\varphi - \pi/2)] + \exp[i\bar{\nu}_l(3\pi/2 - \varphi)]}{1 - \exp[2\pi i \bar{\nu}_l]} + \dots$$

$$\text{mit } \bar{D}_l = -\frac{\pi}{3} \frac{6^{1/2}}{A'(\bar{q}_l)} \cdot \left\{ 1 + \frac{e^{i\pi/3}}{(ka)^{2/3}} \cdot \frac{\bar{s}_l}{5} + \frac{e^{-i\pi/3}}{(ka)^{4/3}} \frac{59 \cdot \bar{s}_l^2}{9 \cdot 350} + \frac{1}{(ka)^2} \cdot \left(\frac{37}{9 \cdot 350} - \frac{223 \cdot \bar{s}_l^3}{81 \cdot 350} \right) + \dots \right\}, \quad (15a)$$

$$u(a, \varphi) = \sum D_l \frac{\exp[i\bar{\nu}_l(\varphi - \pi/2)] + \exp[i\nu_l(3\pi/2 - \varphi)]}{1 - \exp[2\pi i \nu_l]} + \dots$$

$$\text{mit } D_l = \frac{\pi}{q_l \cdot A(q_l)} \cdot \left\{ 1 - \frac{e^{i\pi/3}}{(ka)^{2/3}} \left(\frac{1}{10 s_l^2} + \frac{s_l}{15} \right) + \frac{e^{-i\pi/3}}{(ka)^{4/3}} \left(-\frac{3}{200 s_l^4} + \frac{1}{100 s_l} - \frac{61 \cdot s_l^2}{9 \cdot 350} \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{(ka)^2} \left(\frac{1}{400 s_l^6} - \frac{3}{1000 s_l^3} - \frac{353}{9 \cdot 875} + \frac{s_l^3}{150} \right) + \dots \right\}, \quad (15b)$$

für das Lichtgebiet auf dem Zylinder ($|\varphi| < \pi/2$):

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial n}(a, \varphi) = -2ik \cos \varphi \cdot e^{-ika \cos \varphi} \cdot \left\{ 1 + \frac{i}{2ka \cdot \cos^3 \varphi} + \frac{1 + 3 \sin^2 \varphi}{2(ka)^2 \cos^6 \varphi} + \dots \right\} \\ + k \frac{e^{-i\pi/3}}{(ka)^{1/3}} \cdot \sum \bar{D}_l \frac{\exp[i\bar{\nu}_l(3\pi/2 - \varphi)] + \exp[i\nu_l(3\pi/2 + \varphi)]}{1 - \exp[2\pi i \bar{\nu}_l]} + \dots, \quad (16a)$$

$$u(a, \varphi) = 2e^{-ika \cos \varphi} \cdot \left\{ 1 - \frac{i}{2ka \cdot \cos^3 \varphi} - \frac{1 + 3 \sin^2 \varphi}{(ka)^2 \cdot \cos^6 \varphi} + \dots \right\} \\ + \sum D_l \frac{\exp[i\nu_l(3\pi/2 - \varphi)] + \exp[i\nu_l(3\pi/2 + \varphi)]}{1 - \exp[2\pi i \nu_l]} + \dots, \quad (16b)$$

für die Ausstrahlung in das geometrisch beleuchtete Gebiet für $\rho \gg a$:

$$\bar{u}(\rho, \varphi) = \exp[-ik\rho \cos \varphi] - [(a \cdot \cos \varphi/2)/2\rho]^{1/2} \cdot \exp[ik(\rho - 2a \cos \varphi/2)] \quad (17a)$$

$$\cdot \left\{ 1 + i \frac{4(ka)^2 \sin^2 \varphi/2 - 1}{8k\rho} - \frac{3i}{16ka \cdot \cos \varphi/2} + \frac{i}{2ka \cdot \cos^3 \varphi/2} \right. \\ \left. + \frac{15}{512(ka)^2 \cdot \cos^2 \varphi/2} - \frac{33}{32(ka)^2 \cos^4 \varphi/2} + \frac{5}{4(ka)^2 \cos^6 \varphi/2} + \dots \right\}$$

$$+ (ka)^{1/3} \cdot (2k\rho)^{-1/2} \cdot \exp[i(k\rho + \pi/12)] \cdot \sum \bar{C}_l \frac{\exp[i\bar{\nu}_l(\varphi + \pi)] + \exp[i\bar{\nu}_l(\pi - \varphi)]}{1 - \exp[2\pi i \bar{\nu}_l]} \cdot \left(1 + i \frac{4\bar{\nu}_l^2 - 1}{8k\rho} \right) + \dots$$

$$\text{mit } \bar{C}_l = \frac{\pi^{3/2}}{3 \cdot 6 \cdot A'^2(\bar{q}_l)} \cdot \left\{ 1 + \frac{e^{i\pi/3} \cdot \bar{s}_l}{(ka)^{2/3} \cdot 15} + \frac{e^{-i\pi/3}}{(ka)^{4/3}} \cdot \frac{3 \bar{s}_l^2}{350} + \frac{1}{(ka)^2} \cdot \left(\frac{29}{9 \cdot 350} - \frac{281 \bar{s}_l^3}{81 \cdot 1750} \right) + \dots \right\},$$

$$u(\varrho, \varphi) = \exp[-i k \varrho \cos \varphi] + [(a \cos \varphi/2)/2 \varrho]^{1/2} \exp[i k (\varrho - 2 a \cos \varphi/2)]$$

$$\cdot \left\{ 1 + i \frac{4 (ka)^2 \cdot \sin^2 \varphi/2 - 1}{8 k \varrho} - \frac{3 i}{16 \cdot ka \cdot \cos \varphi/2} - \frac{i}{2 ka \cos^3 \varphi/2} \right. \quad (17b)$$

$$\left. + \frac{15}{512 (ka)^2 \cos^2 \varphi/2} + \frac{33}{32 (ka)^2 \cos^4 \varphi/2} - \frac{7}{4 (ka)^2 \cos^6 \varphi/2} + \dots \right\}$$

$$+ (ka)^{1/3} \cdot (2 k \varrho)^{-1/2} \cdot \exp[i (k \varrho + \pi/12)] \cdot \sum C_l \frac{\exp[i v_l (\varphi + \pi)] + \exp[i v_l (\pi - \varphi)]}{1 - \exp[2 \pi i v_l]} \left(1 + i \frac{4 v_l^2 - 1}{8 k \varrho} \right) + \dots$$

$$\text{mit } C_l = \frac{\pi^{3/2}}{6^{1/2} \cdot q_l \cdot A^2(q_l)} \cdot \left\{ 1 + \frac{e^{i\pi/3}}{(ka)^{2/3}} \left(-\frac{1}{10 s_l^2} + \frac{s_l}{15} \right) + \frac{e^{-i\pi/3}}{(ka)^{4/3}} \left(-\frac{3}{200 s_l^4} + \frac{3 s_l^2}{350} \right) \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(ka)^2} \left(\frac{1}{400 s_l^6} - \frac{1}{750 s_l^3} - \frac{611}{9 \cdot 3500} - \frac{281 \cdot s_l^3}{81 \cdot 1750} \right) + \dots \right\}.$$

Obwohl die Formeln für die geometrisch reflektierten Anteile nur für $|\varphi| < \pi/2$ abgeleitet sind, wird man sie wohl unbedenklich auf den ganzen Bereich $|\pi - \varphi| \gg (ka)^{-1/3}$ anwenden können³.

4. Numerische Ergebnisse

Mit den früher¹ angegebenen Werten von \bar{q}_l , q_l , $A(q_l)$ und $A'(\bar{q}_l)$ ergibt sich für die beiden ersten Kriechwellen beider Randbedingungen das folgende Koeffizientenschema

	1	$e^{i\pi/3} (ka)^{-2/3}$	$e^{-i\pi/3} (ka)^{-4/3}$	$(ka)^{-2}$	$e^{i\pi/3} (ka)^{-8/3}$
$\bar{v}_1/ka =$	1	1,8557571	-0,1147945	0,003974057	0,01120704
$-\bar{D}_1/1,7967792 =$	1	-0,371151	-0,202257	0,115171	
$\bar{C}_1/0,9107192 =$	1	-0,123717	-0,0448245	0,0126603	
$\bar{v}_2/ka =$	1	3,2446076	-0,3509160	0,08330725	-0,02505425
$-\bar{D}_2/1,5687999 =$	1	-0,648922	-0,618281	0,666585	
$\bar{C}_2/0,6942729 =$	1	-0,216307	-0,137024	0,107664	
$v_1/ka =$	1	0,8086165	-0,1454634	0,05096739	-0,01632319
$D_1/1,8324307 =$	1	0,206846	-0,0074049	0,0447071	
$C_1/1,5318731 =$	1	0,0990300	0,0196735	0,0188914	
$v_2/ka =$	1	2,5780961	-0,2603410	0,08925042	-0,02679850
$-D_2/0,7347295 =$	1	0,186918	0,0904177	0,0280926	
$C_2/0,7851980 =$	1	-0,156828	-0,0812261	0,0750548	

5. Schlußbemerkung

Die Entwicklungen (16) und (17) lassen sich zur Berechnung der Rückstrahlung ($\varphi = 0$) gebrauchen, sobald ka größer ist als etwa 2. Entfernt man sich von diesem Winkelwert, so benötigt man bald erheblich größere Werte von ka , da der geometrisch reflektierte Anteil in (17) nach Potenzen von $(ka \cos^3 \varphi/2)^{-1}$ fortschreitet; die geometrische Reihe versagt bereits in Gebieten, in welchen die Reihe der Kriechwellen noch lange brauchbar ist. Es wäre daher erwünscht, für die geometrischen Integrale asymptotische Darstellungen zu besitzen,

welche auch für kleinere Werte von $ka \cos^3 \varphi/2$ brauchbar sind, etwa in Gestalt einer nach fallenden Potenzen von ka und steigenden Potenzen von $ka \cos^3 \varphi/2$ fortschreitenden Reihe, deren Koeffizienten bis jetzt noch nicht bestimmt wurden. — Nimmt man die geometrische Welle künstlich weg, indem man an einer Seite einen ebenen Schirm an den Zylinder legt, so beobachtet man in dessen Schatten nur die über den freien Teil des Zylinders gelaufenen Kriechwellen und kann auch für kleine Beugungswinkel und ka wenig größer als 2 Gl. (17) heranziehen.

³ Anm. b. d. Korr.: Der Nachweis wird gegeben bei W. Franz und P. Beckmann, Creeping waves in diffraction, Proc. URSI-Michigan Symposium 1955, Trans. Inst. Radio Eng. — Der von I. Imai (Z. Phys. **137**, 31 [1954]) angegebene Beweis ist nicht richtig, s. Franz-Beckmann.